El Arenario

Por

Arquímedes

Traducción de

Emilio Méndez Pinto

Edición digital para la Biblioteca Digital del ILCE
Título original: *The Sand Reckoner of Archimedes*

Primera edición: Cambridge University Press, 1897

[Tomado de la traducción de Thomas Heath]

Algunos piensan, rey Gelón, que el número de los granos de arena es infinito en multitud; y con arena me refiero no sólo a la que existe alrededor de Siracusa y del resto de Sicilia, sino también a la que se encuentra en cada región habitada o deshabitada. También hay algunos que, sin considerarlo infinito, piensan que no ha sido nombrado ningún número lo suficientemente grande como para exceder su multitud. Y es claro que si los que sostienen esta opinión imaginaran una masa compuesta de arena en otros aspectos tan grande como la masa de la Tierra, incluyendo en ella todos los mares y cavidades de la Tierra, llenada hasta una altura igual a la de las montañas más altas, reconocerían todavía menos que pueda ser expresado algún número que excediese la multitud de la arena así considerada. Pero yo intentaré mostrarte, por medio de pruebas geométricas que podrás seguir, que, de los números nombrados por mí y ofrecidos en el trabajo que envié a Zeuxipo, algunos exceden no solamente al número de la masa de arena igual en magnitud a la Tierra llenada de la manera descrita, sino también al de una masa igual en magnitud a la del Universo.

Sabes que "Universo" es el nombre dado por la mayoría de los astrónomos a la esfera cuyo centro es el centro de la Tierra y cuyo radio es igual a la línea recta entre el centro del Sol y el centro de la Tierra. Esto es lo que suele contarse, como habrás oído de los astrónomos. Pero Aristarco de Samos sacó un libro consistente en algunas hipótesis en donde las premisas conducen al resultado de que el Universo es muchas veces mayor que el ahora así llamado. Sus hipótesis son que las estrellas fijas y el Sol permanecen inmóviles, que la Tierra gira alrededor del Sol en la circunferencia de un círculo, estando el Sol en el centro de la órbita, y que la esfera de las estrellas fijas, situada alrededor del mismo centro que el del Sol, es tan grande que el círculo en el que supone que gira la Tierra guarda la misma proporción a la distancia de las estrellas fijas que la que el centro de la esfera guarda a su superficie.

Es fácil ver que esto es imposible, porque como el centro de la esfera no tiene magnitud, no podemos concebir que tenga proporción alguna con la superficie de la esfera. Sin embargo, debemos tomar que Aristarco quería decir esto: ya que concebimos la Tierra como el centro del Universo, por así decirlo, la proporción que guarda con lo que describimos como el "Universo" es la misma que la proporción que la esfera conteniendo el círculo en el que él supone que la Tierra gira guarda con la esfera de las estrellas fijas. Esto porque él adapta las pruebas de sus resultados a una hipótesis de este tipo, y en particular parece suponer la magnitud de la esfera en la que representa la Tierra moviéndose igual a lo que llamamos "Universo".

Yo digo entonces que, incluso si se hiciera una esfera de arena tan grande como la que Aristarco supone es la esfera de las estrellas fijas, probaré que de los números nombrados en los Principios[1] algunos exceden en multitud al número de la arena que es igual en magnitud a la esfera referida, siempre y cuando se hagan las siguientes suposiciones.

1. El perímetro de la Tierra es de aproximadamente $3{,}000{,}000$ de estadios y no mayor.

Es verdad que algunos han intentado probar, como desde luego sabes, que el perímetro dicho es de aproximadamente $300{,}000$ estadios. Pero yo voy más lejos y, poniendo la magnitud de la Tierra en diez veces el tamaño que mis predecesores pensaron, supongo que su perímetro es de aproximadamente $3{,}000{,}000$ de estadios y no mayor.

2. El diámetro de la Tierra es mayor que el diámetro de la Luna, y el diámetro del Sol es mayor que el diámetro de la Tierra.

En esto sigo a la mayoría de los astrónomos.

3. El diámetro del Sol es aproximadamente 30 veces el diámetro de la Luna y no mayor.

Es verdad que, de los astrónomos anteriores, Eudoxo declaró que era aproximadamente nueve veces mayor, y Fidias, mi padre, doce veces, mientras que Aristarco intentó probar que el diámetro del Sol es mayor que 18 veces pero menor que 20 veces el diámetro de la Luna. Pero yo voy más lejos que Aristarco para que la verdad de mi proposición pueda establecerse más allá de toda disputa, y supongo que el diámetro del Sol es aproximadamente 30 veces el de la Luna y no mayor.

4. El diámetro del Sol es mayor que el lado del chiliágono[2] inscrito en el mayor círculo en el Universo.

Hago esta suposición porque Aristarco descubrió que el Sol parece ser aproximadamente la setecientos veinteava parte del círculo del Zodiaco, y yo mismo intenté, por un método que ahora describiré, encontrar experimentalmente el ángulo subtendido por el Sol teniendo su vértice en el ojo.

El resultado del experimento fue mostrar que el ángulo subtendido por el diámetro del Sol fue menor que una $1/164$ parte, y mayor que una $1/200$ parte, de un ángulo recto.

Probar que el diámetro del Sol es mayor que el lado de un chiliágono, o figura con 1000 lados iguales, inscrito en un gran círculo del "Universo".

---

[1] Una trabajo perdido de Arquímedes. Nota del Traductor.
[2] Polígono de 1000 lados. Nota del Traductor.

Supongamos que el plano del papel es el plano que pasa por el centro del Sol, el centro de la Tierra y del ojo, en el momento en el que el Sol apenas ha salido por encima del horizonte. Dejemos que el plano corte la Tierra en el círculo EHL y al Sol en el círculo FKG, siendo C, O los centros de la Tierra y del Sol, respectivamente, y E siendo la posición del ojo.

Además, dejemos que el plano corte la esfera del "Universo" en el círculo grande AOB.

Desde E trácense dos tangentes al círculo FKG tocándolo en P, Q, y desde C trácense otras dos tangentes al mismo círculo tocándolo en F, G, respectivamente.

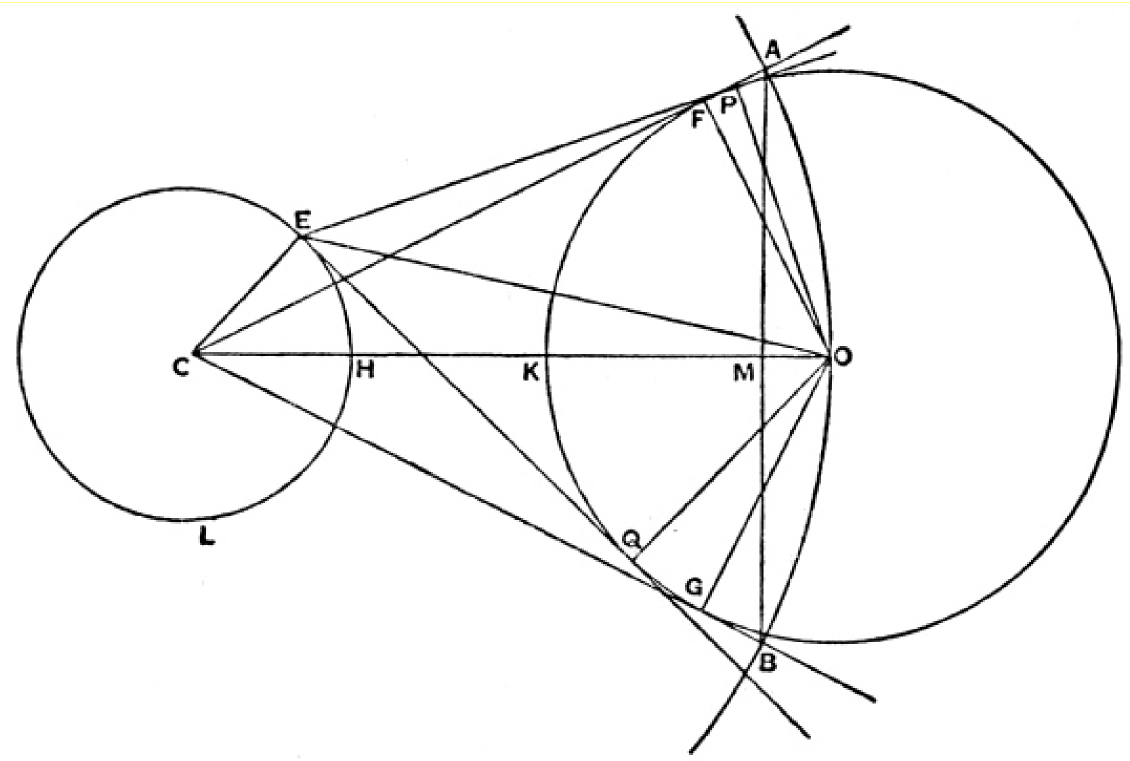
Dejemos que CO se encuentre con las secciones de la Tierra y del Sol en H, K, respectivamente, y dejemos que CF, CG se encuentren con el círculo grande AOB en A, B.

Únanse EO, OF, OG, OP, OQ, AB, y dejemos que AB se encuentre con CO en M.

Ahora $CO > EO$, ya que el Sol está justo arriba del horizonte.

$$\text{Por lo tanto } \angle PEQ > \angle FCG .$$

Y $\angle PEQ > 1/200R$ pero $< 1/64R$, donde R representa un ángulo recto.



$$\text{Así } \angle FCG < R \text{, a fortiori,}$$

y la cuerda AB subtiende un arco del círculo grande que es menor que $1/656$ de la circunferencia de tal círculo.

Ahora, el perímetro de cualquier polígono inscrito en el círculo grande es menor que $44/7$ CO.

Por lo tanto $AB : CO < 11 : 1148$,

y, a fortiori, $AB < 1/100$ CO. (α)

De nuevo, ya que $CA = CO$ y AM es perpendicular a CO, mientras que OF es perpendicular a CA,

$$AM = OF.$$

Por lo tanto $AB = 2AM =$ (diámetro del Sol).

Así, (diámetro del Sol) $< 1/100$ CO, por (α),

y, a fortiori, (diámetro de la Tierra) $< 1/100$ CO.

Por lo tanto $CH + OK < 1/100$ CO,

así que $HK > 99/100$ CO

o $CO : HK < 100 : 99$.

Y $CO > CF$, mientras que $HK < EQ$.

Por lo tanto $CF : EQ < 100 : 99$. (β)

Ahora, en los triángulos rectángulos CFO, EQO, de los lados sobre los ángulos rectos,

$OF = OQ$, pero $EQ < CF$.

Por lo tanto $\angle OEQ : \angle OCF > CO : EO$,

pero $< CF : EQ$.

Duplicando los ángulos,

$\angle PEQ : \angle ACB < CF : EQ$

$< 100 : 99$, por (β).

Pero $\angle PEQ > 1/200$ R, por hipótesis.

Por lo tanto $\angle ACB > 99/20000$ R

$> 1/203$ R.

Se sigue que el arco AB es mayor que $1/812$ de la circunferencia del círculo grande AOB.

Por lo tanto, a fortiori, $AB >$ (lado del chiliágono inscrito en el círculo grande), y AB es igual al diámetro del Sol, como se probó arriba.

Ahora pueden probarse los siguientes resultados:

(diámetro del "Universo") $< 10{,}000$ (diámetro de la Tierra),

y (diámetro del "Universo") $< 10{,}000{,}000{,}000$ estadios.

(1) Supongamos, por brevedad, que d_u representa el diámetro del “Universo”, d_s el del Sol, d_t el de la Tierra, y d_l el de la Luna.

$$\text{Por hipótesis, } d_s \geq 30d_l$$

$$\text{y } d_t > d_l;$$

$$\text{por lo tanto } d_s < d_t.$$

Ahora, por la última proposición,

$$d_s > (\text{lado del chiliágono inscrito en el círculo grande}),$$

$$\text{así que } (\text{perímetro del chiliágono}) < 1000d_t < 30{,}000d_t.$$

Pero el perímetro de cualquier polígono regular con más de 6 lados inscrito en un círculo es mayor que el del hexágono regular inscrito [en un círculo], y por consiguiente mayor que tres veces el diámetro.

Por lo tanto

$$(\text{perímetro del chiliágono}) > 3d_u.$$

$$\text{Se sigue que } d_u < 10{,}000d_t.$$

(2) $(\text{perímetro de la Tierra}) \geq 3{,}000{,}000$ de estadios.

$$\text{Y } (\text{perímetro de la Tierra}) > 3d_t.$$

$$\text{Por lo tanto } d_t < 1{,}000{,}000 \text{ de estadios,}$$

$$\text{por lo que } d_u < 10{,}000{,}000{,}000 \text{ de estadios.}$$

Supongamos una cantidad de arena no mayor que una semilla de amapola, y supongamos que contiene no más de $10{,}000$ granos. Después, supongamos que el diámetro de la semilla de amapola no es menor que $1/40$ del ancho de un dedo.

ÓRDENES Y PERIODOS DE NÚMEROS

I. Tenemos nombres tradicionales para los números hasta una miríada $(10{,}000)$; por lo tanto podemos expresar números hasta una miríada de miríadas $(100{,}000{,}000)$. Llamemos a estos números números del primer orden.

Supongamos que $100{,}000{,}000$ es la unidad del segundo orden, y que éste consista en los números desde tal unidad hasta $100{,}000{,}000^2$.

De nuevo, sea este último número la unidad del tercer orden de números terminando en $100{,}000{,}000^3$, y así sucesivamente hasta que alcancemos el $100{,}000{,}000°$ orden de números terminando con $100{,}000{,}000^{100{,}000{,}000}$, que llamaremos P.

II. Supongamos que los números desde 1 hasta P recién descritos forman el primer periodo.

Sea P la unidad del primer orden del primer periodo, y que consista en los números desde P hasta $100{,}000{,}000$ P.

Sea el último número la unidad del segundo orden del segundo periodo, y que termine con $100{,}000{,}000^2$ P.

Podemos seguir de esta manera hasta que alcancemos el $100{,}000{,}000°$ orden del segundo periodo terminando con $100{,}000{,}000^{100{,}000{,}000}$ P, o P^2.

III. Tomando P^2 como la unidad del primer orden del tercer periodo, procedemos del mismo modo hasta que alcancemos el $100{,}000{,}000°$ orden del tercer periodo terminando con P^3.

IV. Tomando P^3 como la unidad del primer orden del cuarto periodo, continuamos el mismo proceso hasta que lleguemos al $100{,}000{,}000°$ orden del $100{,}000{,}000°$ periodo terminando con $P^{100{,}000{,}000}$. Es fácil ver que este último número es $100{,}000{,}000$ veces el producto de $100{,}000{,}000^{99{,}999{,}999}$ y $P^{99{,}999{,}999}$, i. e., $P^{100{,}000{,}000}$.

OCTADAS

Consideremos la serie de términos en proporción continua de los cuales el primero es 1 y el segundo 10. La primera octada de estos términos cae, de acuerdo con esto, bajo el primer orden del primer periodo descrito arriba, la segunda octada bajo el segundo orden del primer periodo, siendo el primer término de la octada la unidad del orden correspondiente en cada caso. De manera similar para la tercera octada, y así sucesivamente. Del mismo modo podemos poner cualquier número de octadas.

TEOREMA

Si hay cualquier número de términos de una serie en proporción continua, digamos $A_1, A_2, A_3, ..., A_m, ..., A_n, ..., A_{m+n-1}, ...,$ de los cuales $A_1 = 1, A_2 = 10$, y si cualesquiera dos términos, como A_m, A_n son tomados y multiplicados, el producto $A_m \cdot A_n$ será un término en la misma serie y será tantos términos distante de A_n como A_m es distante de A_1; también será distante de A_1 por un número de términos menos uno que la suma de los números de términos por los cuales A_m y A_n, respectivamente, son distantes de A_1.

Tomemos el término que es distante de A_n por el mismo número de términos que A_m es distante de A_1. Este número de términos es *m* (estando contados tanto el primero como el último). Así, el término a ser tomado es *m* términos distante de A_n, y es por tanto el término A_{m+n-1}.

Por consiguiente tenemos que probar que

$$A_m \cdot A_n = A_{m+n-1}.$$

Ahora, términos igualmente distantes de otros términos en la proporción continua son proporcionales.

Así, $A_m / A_1 = A_{m+n-1} / A_n$.

Pero $A_m = A_m \cdot A_1$, ya que $A_1 = 1$.

Por lo tanto, $A_{m+n-1} = A_m \cdot A_n$.

El segundo resultado es ahora obvio, ya que A_m es *m* términos distante de A_1, A_n es *n* términos distante de A_1, y A_{m+n-1} es $m+n-1$ términos distante de A_1.

APLICACIÓN AL NÚMERO DE ARENA

Por suposición,

$$(\text{diámetro de semilla de amapola}) \leq (\text{ancho del dedo}),$$

y como las esferas están una con otra en la razón triplicada de sus diámetros, se sigue que

(esfera de un diámetro del ancho de un dedo) $\geq 64{,}000$ semillas de amapola *granos*

$\geq 64{,}000 \times 10{,}000$

$\geq 640{,}000{,}000$ *de*

≥ 6 unidades de segundo orden

$+ 40{,}000{,}000$ unidades de primer orden *arena* (a fortiori) < 10 unidades de segundo orden de números.

Ahora incrementamos gradualmente el diámetro de la esfera supuesta, multiplicándola por 100 cada vez. Así, recordando que la esfera es de este modo multiplicada por 100^3 o $1{,}000{,}000$, al número de granos de arena que estarían contenidos en una esfera con cada diámetro sucesivo puede llegarse como sigue.

Diámetro de la esfera	Número correspondiente de granos de arena.
(1) 100 anchos de dedo	$< 1{,}000{,}000 \times 10$ unidades de segundo orden
	$<$ (7º término de la serie) $\times$ (10º término de la serie)
	$<$ 16º término de la serie (i. e., 10^{15})
	$10{,}000{,}000$ unidades de segundo orden.
(2) $10{,}000$ anchos de dedo	$< 1{,}000{,}000 \times$ (último número)
	$<$ (7º término de la serie) $\times$ (16º término de la serie)
	$<$ 22º término de la serie (i. e., 10^{21})
	$< 100{,}000$ unidades de tercer orden.
(3) 1 estadio	$< 100{,}000$ unidades de tercer orden.
($< 10{,}000$ anchos de dedo)	
(4) 100 estadios	$< 1{,}000{,}000 \times$ (último número)
	$<$ (7º término de la serie) $\times$ (22º término)
	$<$ 28º término de la serie (i. e., 10^{27})
	$< 1{,}000$ unidades de cuarto orden.
(5) 10,000 estadios	$< 1{,}000{,}000 \times$ (último número)
	$<$ (7º término de la serie) $\times$ (28º término)
	$<$ 34º término de la serie (i. e., 10^{33})
	$<$ 10 unidades de quinto orden.
(6) 1, 000,000 de estadios	$<$ (7º término de la serie) $\times$ (34º término)
	$<$ 40º término (i. e., 10^{39})
	$< 10{,}000{,}000$ unidades de quinto orden.
(7) 100, 000,000 de estadios	$<$ (7º término de la serie) $\times$ (40º término)
	$<$ 46º término (i. e., 10^{45})
	$< 100{,}000$ unidades de sexto orden.
(8) 10, 000,000, 000 de estadios	$<$ (7º término de la serie) $\times$ (46º término)
	$<$ 52º término de la serie (i. e., 10^{51})

$$< 1{,}000 \text{ unidades de séptimo orden.}$$

Pero, por una proposición de arriba,

$$(\text{diámetro del “Universo”}) < 10{,}000{,}000{,}000 \text{ de estadios.}$$

Por lo tanto, el número de granos de arena que podrían estar contenidos en una esfera del tamaño de nuestro “Universo” es menor que 1,000 unidades del séptimo orden de números (o 10^{51}).

De esto podemos probar, además, que una esfera del tamaño atribuido por Aristarco a la esfera de las estrellas fijas contendría un número de granos de arena menor que $10{,}000{,}000$ unidades del octavo orden de números (o $10^{56+7} = 10^{63}$).

Porque, por hipótesis,

(Tierra) : (“Universo”) = (“Universo) : (esfera de las estrellas fijas).

Y

$$(\text{diámetro del “Universo”}) < 10{,}000\,(\text{diámetro de la Tierra}).$$

Por lo que

$$(\text{diámetro de la esfera de estrellas fijas}) < 10{,}000\,(\text{diámetro del “Universo”}).$$

Por consiguiente,

$$(\text{esfera de estrellas fijas}) < 10{,}000^3\,(\text{“Universo”}).$$

Se sigue que el número de granos de arena que estarían contenidos en una esfera igual a la esfera de las estrellas fijas

$$< 10{,}000^3 \times 1{,}000 \text{ unidades de séptimo orden}$$
$$< (13^{\text{o}} \text{ término de la serie}) \times (52^{\text{o}} \text{ término de la serie})$$
$$< 64^{\text{o}} \text{ término de la serie (i. e., } 10^{63})$$
$$< 10{,}000{,}000 \text{ unidades del octavo orden de números.}$$

CONCLUSIÓN

Concibo que estas cosas, rey Gelón, le parecerán increíbles a la gran mayoría de las personas que no han estudiado matemáticas, pero para aquellos que están versados en la materia y han pensado en la cuestión de las distancias y tamaños de la Tierra, el Sol, la Luna, y todo el Universo, la prueba llevará a la convicción. Y fue por esta razón que pensé que el tema no sería inapropiado para su consideración.